

ACELERACION DE LA CONVERGENCIA EN LA RESOLUCION ITERATIVA DE SISTEMAS LINEALES, MEDIANTE SOBRE RELAJACION

Jorge Anibal Reyes
Raúl Edgardo Rossi

Departamento de Ingeniería
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca - Argentina

1. INTRODUCCION

En el presente trabajo se analizan algunos métodos iterativos en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y se propone un algoritmo mixto de aceleración de la convergencia, con el objeto de reducir el tiempo de ejecución de un programa de computación para la solución de problemas técnicos mediante el método de Elementos finitos.

En la utilización del mencionado método, que los autores han adoptado para el análisis del comportamiento estructural de presas de gravedad, se llega al planteo de un sistema de ecuaciones lineales, donde la matriz es simétrica, positiva definida, con diagonal dominante en algunas filas, y bajo ciertas condiciones, banda. Cada nodo del modelo discretizado posee tres grados de libertad y el orden del sistema resulta bastante grande cuando se pretende diseñar modelos relativamente densos en elementos finitos. En las figuras 1, 2, 3 y 4 se muestran perspectivas esquemáticas de los modelos de un dique de gravedad en arco, con 79, 151, 354 y 867 nodos respectivamente, que fueron procesados para cuatro estados de sollicitación (peso propio, presión hidrostática, variación térmica y efecto sísmico); vale decir que se

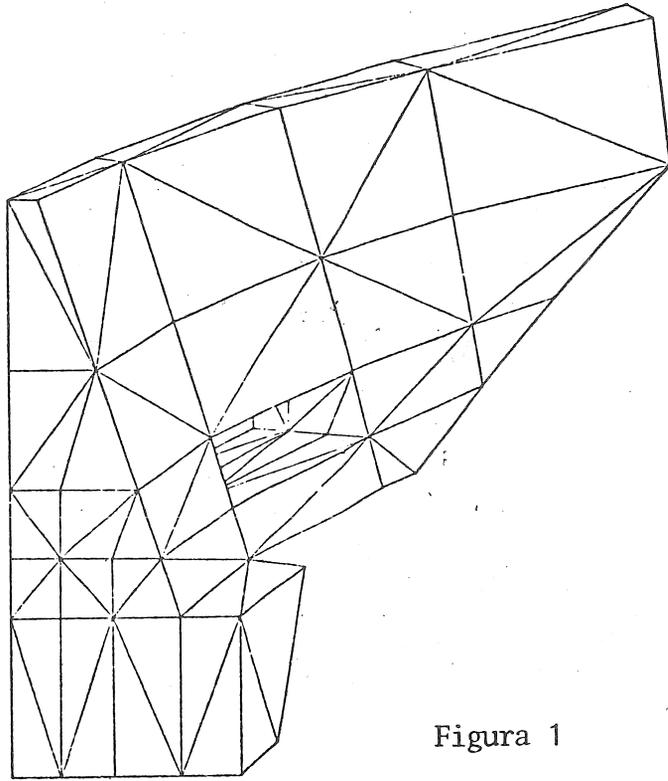


Figura 1

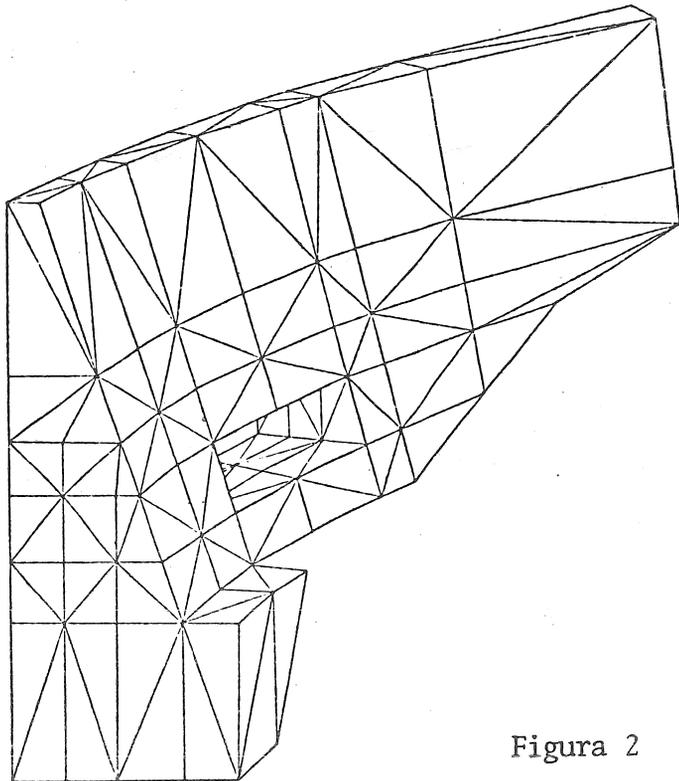


Figura 2

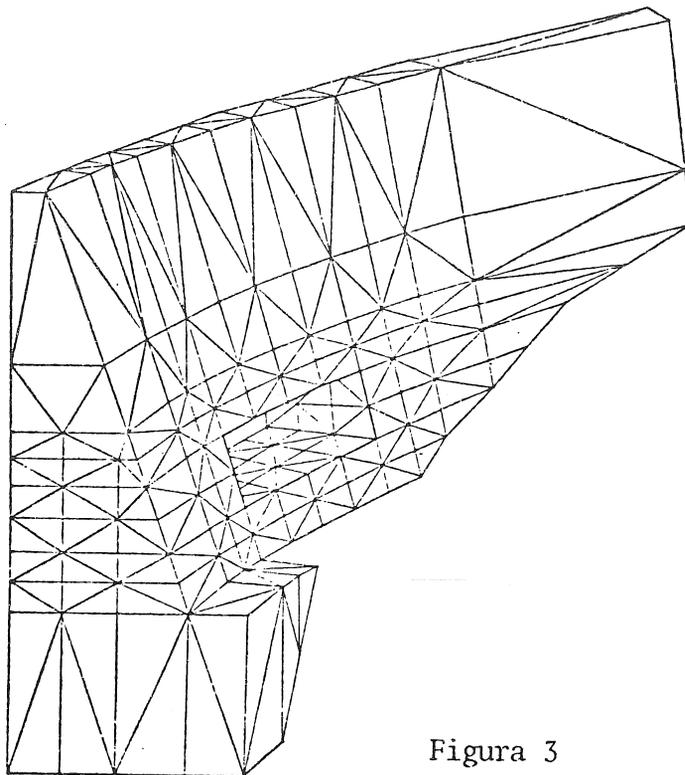


Figura 3

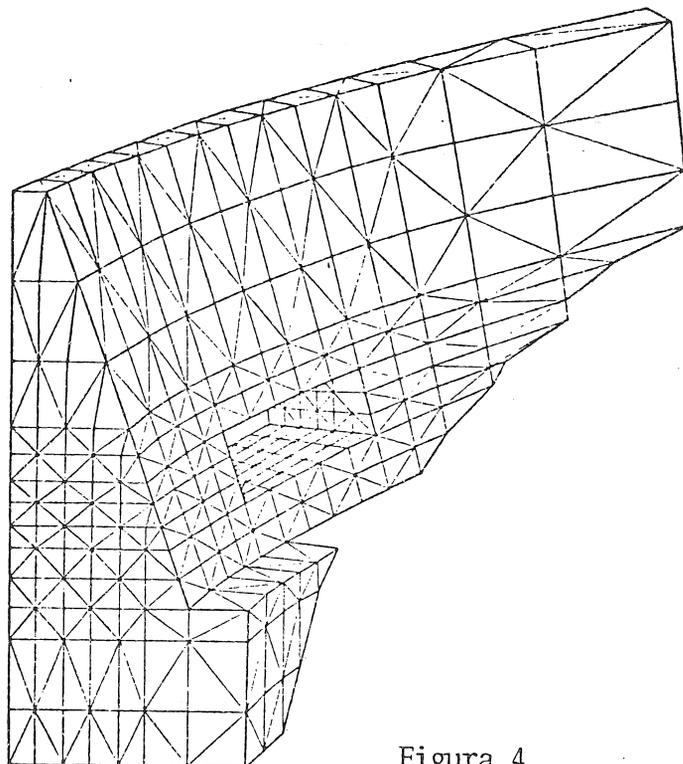


Figura 4

requirió, en cada caso la resolución de un sistema de ecuaciones, con cuatro términos independientes.

El carácter banda de la matriz no es del todo aprovechable en casos como el descrito, ya que aun cuando se logre una óptima numeración de los nodos, el ancho de la banda conduce a requerimientos de memoria muy grandes (del orden de tres megabytes en el caso del modelo mostrado en la fig. 4.

Otra característica de la matriz es la de presentar relativamente muy pocos coeficientes no nulos, pues el número de los mismos, en cada fila, no supera 57. Justamente esta condición de matriz rala permite un sustancial ahorro de memoria de máquina, mediante su compactación en un vector pero a costa de la imposibilidad de utilizar procedimientos directos en la resolución, generalmente más rápidos y precisos que los métodos iterativos. Un excelente análisis de los procedimientos iterativos y antecedentes de los mismos, es presentada por Jennings (1)

A continuación se describen los resultados obtenidos con la aplicación de los algoritmos de Gauss-Seidel, de aceleración de la convergencia de Liusternik, sucesivas sobre relajaciones (S.O.R) con la determinación del coeficiente óptimo mediante el método de Carré y el de gradientes conjugados; asimismo los autores muestran los resultados obtenidos a través de la aplicación de Liusternik al método S.O.R de Carré.

Para tal efecto se utilizó un sistema de 270 ecuaciones lineales cuya matriz posee 1614 coeficientes no nulos positivos, con un máximo de seis por fila, y con 40 filas con diagonal no dominante. Este sistema elegido para las pruebas de los algoritmos mencionados tiene solución exacta con todas sus incógnitas iguales a la unidad.

2. ALGORITMO DE GAUSS-SEIDEL

Describimos el sistema lineal con la conocida notación incidual de matrices:

$$a_{jk} \cdot x_k = b_j \quad (2.1)$$

donde a_{jk} son los coeficientes de la matriz del sistema, siendo j el índice de fila, k el de columna; x_k es el vector de las incógnitas; b_j el vector de los términos independientes.

El denominado método de Gauss-Seidel de un punto consiste en aplicar:

$$x_j^{(i+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left[b_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} \cdot x_k^{(i+1)} - \sum_{k=j+1}^n a_{jk} x_k^{(i)} \right] \text{ para } 1 \leq j \leq n \quad (2.2)$$

donde $x^{(i)}$ y $x^{(i+1)}$ indican los valores de las incógnitas en la iteración i e $i+1$, respectivamente; n es el orden del sistema.

Como es sabido, el método de Gauss-Seidel es convergente cuando a_{jk} es simétrica, definida positiva, con $a_{jj} > 0$. Tal es el caso de la denominada "matriz de rigidez" del Método de Elementos Finitos.

Para el comienzo del proceso de cálculo se adoptó el vector inicial $x_j^{(0)}$ con todas sus componentes nulas.

En virtud de la simplicidad del método, no se considera necesario incluir un diagrama de flujo del proceso.

En la página A.3 del Apéndice se transcriben los valores de las 270 incógnitas del sistema, obtenidas con 205 iteraciones; el proceso se limitó con una prueba de máxima diferencia relativa

$$\mathcal{E} = \frac{|\delta_j^{(i)}|}{x_j^{(i)}} = \frac{|x_j^{(i)} - x_j^{(i-1)}|}{x_j^{(i)}} \leq 0.00001; \text{ con } 1 \leq j \leq n \quad (2.3)$$

Es habitual designar a δ_j vector desplazamiento en una iteración.

Se observa que la incógnita x_{198} alcanza el valor de menor precisión:

0.996734 o sea con un error relativo 0.00327.

3. ALGORITMO DE LIUSTERNIK

Dentro del grupo de las técnicas de aceleración de la convergencia se destaca por su sencillez el método de L.A. Liusternik, que consiste en utilizar la siguiente expresión:

$$\bar{x}_j^{(i+1)} = x_j^{(i)} + \frac{x_j^{(i+1)} - x_j^{(i)}}{1-\mu}; \quad \text{con } 1 \leq j \leq n \quad (3.1)$$

siendo $\mu = \|\delta^{(i+1)}\| / \|\delta^{(i)}\|$, con $\|\delta^{(i)}\| = \sum_j^n |x_j^{(i)} - x_j^{(i-1)}|$ (3.2)

El procedimiento consiste en realizar un cierto número de iteraciones con la expresión (2.2), que es el algoritmo de Gauss-Seidel, y aplicar las expresiones (3.2) y (3.1) con el objeto de mejorar la convergencia; en la fórmula (3.1) $\bar{x}_j^{(i+1)}$ es el nuevo vector de las incógnitas para las sucesivas iteraciones. En la página A.1 del Apéndice se muestra el respectivo diagrama de flujo.

Con el sistema de prueba de 270 ecuaciones se aplicó esta técnica cada 10 iteraciones; los valores sucesivos del coeficiente de Liusternik y las incógnitas se muestran en las páginas A.4 y A.5 del Apéndice. Cabe destacar que la incógnita x_{198} continúa siendo la más alejada del valor exacto, con un error relativo por exceso de 0.00331, del mismo orden que el resultante con Gauss-Seidel.

4. ALGORITMO DE SOBRE RELAJACION DE CARRE

El procedimiento de las sucesivas sobre relajaciones (SOR) consiste en aplicar la siguiente expresión:

$$\bar{x}_j^{(i+1)} = x_j^{(i)} + \omega (x_j^{(i+1)} - x_j^{(i)}); \quad \text{con } 1 \leq j \leq n \quad (4.1)$$

en la que ω es el denominado factor de relajación, constante real; cuando es positiva y mayor que la unidad se produce sobre relajación.

El método consiste en utilizar la expresión (2.2) (Gauss-Seidel de un punto) y a continuación, en cada iteración, la fórmula (4.1). El problema reside en conocer a priori el llamado "factor de relajación óptimo", ω_{op} , que maximiza la rapidez de la convergencia.

El algoritmo de Carré es un procedimiento que permite estimar ω_{op} durante el transcurso mismo del proceso de resolución del sistema, con una especial ventaja cuando se requiere las soluciones con distintos términos independientes, toda vez que ω_{op} no depende de ellos.

El algoritmo de Carré se describe en el diagrama de flujo que se muestra en la página A.2 del Apéndice.

Al aplicar este método al sistema de prueba se alcanzó la condición de salida (2.3) con 52 iteraciones, 4 más que con el algoritmo de Liusternik. No obstante se comprueba una ventaja más importante al observar los valores alcanzado por las incógnitas (pág. A.6 del Apéndice): las raíces x_{198} y x_{114} , que son las afectadas de mayor error, muestran ahora una diferencia relativa de 0.00023, vale decir un grado de precisión diez veces mayor que con Liusternik.

5. ALGORITMO DE GRADIENTES CONJUGADOS

Una fundamentación del método puede obtenerse en Jennings (1) quien propone el siguiente proceso para una iteración:

$$\mu_j^{(i)} = a_{jk} \cdot p_j^{(i)}$$

$$\alpha^{(i)} = [r_j^{(i)}]^T \cdot r_j^{(i)} / [p_j^{(i)}]^T \cdot \mu_j^{(i)}$$

$$\begin{aligned}
 x_j^{(i+1)} &= x_j^{(i)} + \alpha^{(i)} \cdot \beta_j^{(i)} \\
 r_j^{(i+1)} &= r_j^{(i)} - \alpha^{(i)} \cdot u_j^{(i)} \\
 \beta_j^{(i)} &= [r_j^{(i+1)}]^T \cdot r_j^{(i+1)} / [r_j^{(i)}]^T \cdot r_j^{(i)}
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

$$\beta_j^{(i+1)} = r_j^{(i+1)} + \beta_j^{(i)} \cdot \beta_j^{(i)}$$

los valores iniciales (para $i=0$) son:

$$\beta_j^{(0)} = r_j^{(0)} = b_j - a_{jk} \cdot x_k^{(0)}
 \tag{5.2}$$

El vector inicial $x_k^{(0)}$ es tomado usualmente nulo.

Los resultados obtenidos en la aplicación de este algoritmo, al sistema de 270 ecuaciones, se muestra en la página A.7 luego de 42 iteraciones. La incógnita x_{198} resulta, también en este caso, la más alejada del valor exacto, con un error por exceso de 0.00208.

6. ALGORITMO MIXTO

Los autores realizaron una experiencia numérica que consistió en aplicar la técnica de aceleración de la convergencia (Liusternik) al procedimiento de Carré, lográndose la convergencia con tan solo 32 iteraciones obteniéndose una precisión de 0.00003 señalada por la misma incógnita x_{198} , como se muestra en la página A.8.

7. TIEMPOS DE EJECUCION

Con el objeto de realizar comparaciones entre los distintos algoritmos, se consideró necesario correr los programas bajo las mismas condiciones, obteniéndose los tiempos indicados en la Tabla N° 1 en la que se asig

nó valor 1 al tiempo correspondiente al método mixto.

TABLA N° 1

Algoritmo	Tiempo relativo
Mixto	1
Gradientes Conjug.	1.52
Carré	1.78
Liusternik	2.12
Gauss-Seidel	7.44

8. CONCLUSIONES

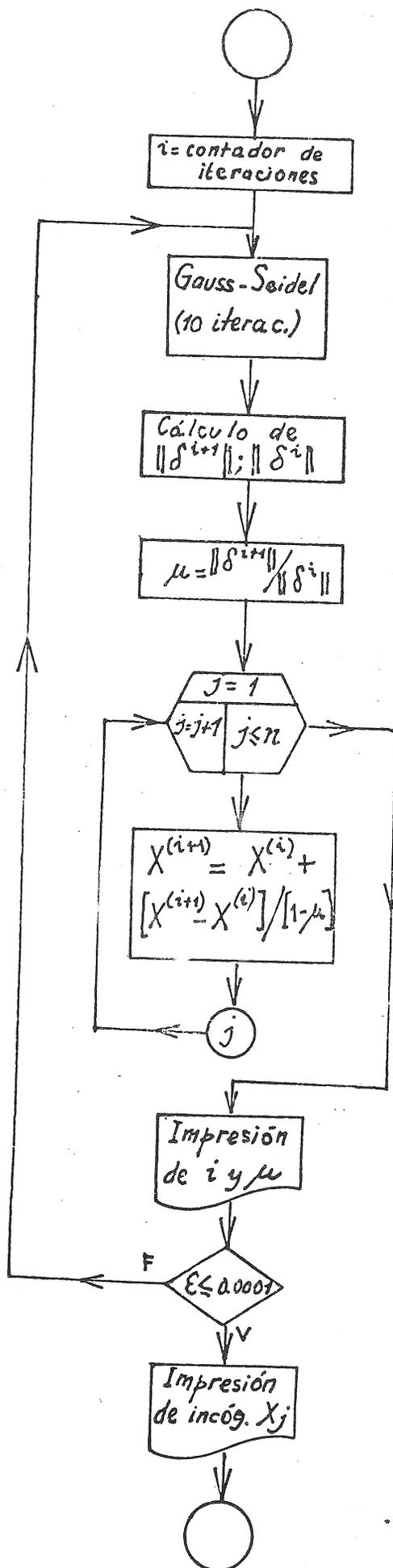
Del análisis de los resultados obtenidos se observa que el algoritmo propuesto por los autores tiene ventajas frente a los restantes, tanto en cantidad de iteraciones, para satisfacer una requerida tolerancia, como en tiempo de ejecución; asimismo la precisión que se alcanza es del mismo orden que en los restantes. No obstante ello se considera necesario realizar pruebas exhaustivas con el objeto de asegurar sus posibilidades de aplicación.

9. BIBLIOGRAFIA

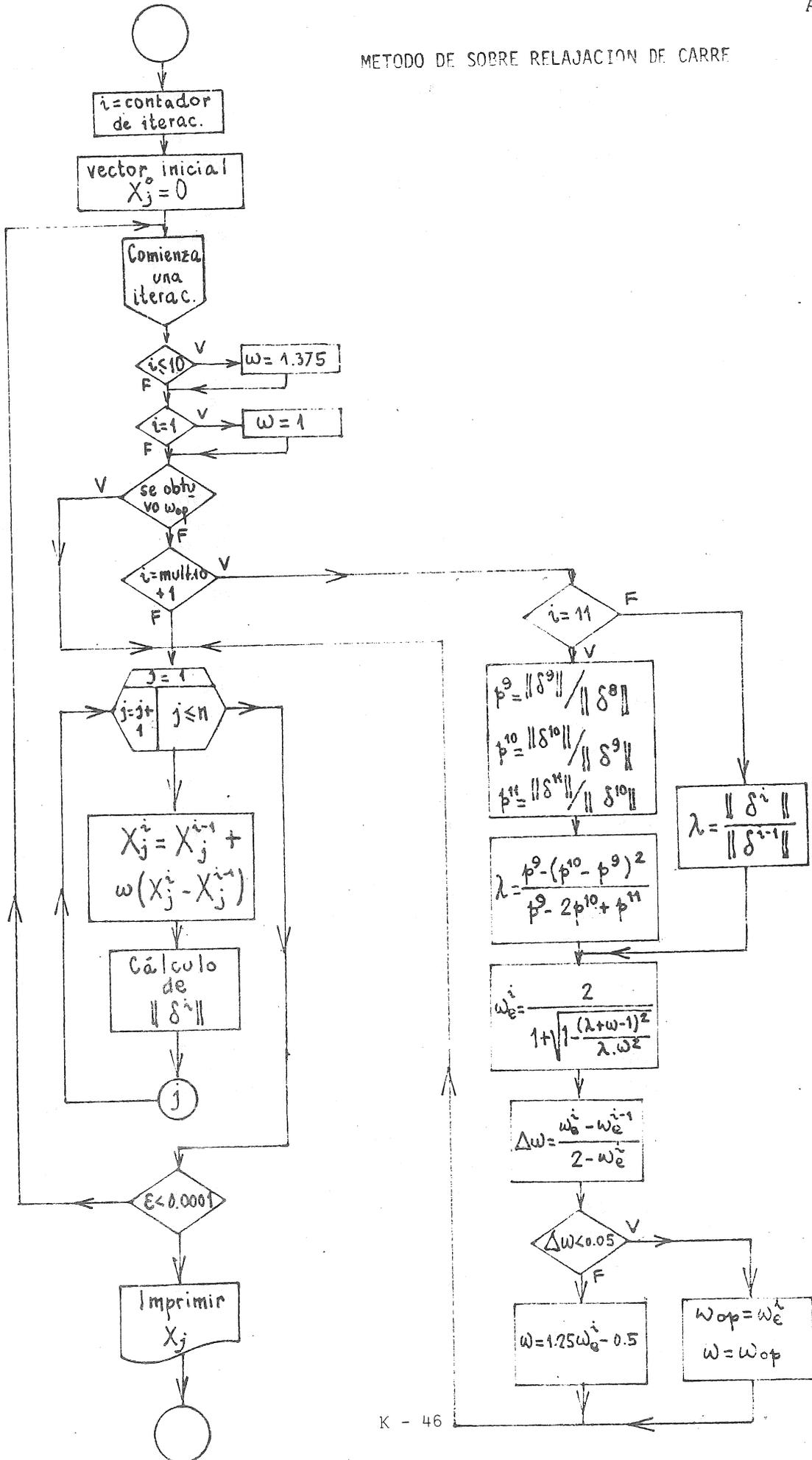
- (1)- JENNINGS,A. and MALIK,G. "The solution of sparse linear equations by the conjugate gradient method" Int.J.Num.Engng. Vol.12, 141-158 (1978)
- (2)- JENNINGS,A. "Matrix computation for engineers and scientist", Wiley , London, (1977)
- (3)- CARRE,B.A. "The determination of the optimum accelerating factor for successive over-relaxation" Comp.J., Vol 4, 73-78 (1961)

ACELERACION DE LA CONVERGENCIA EN LA RESOLUCION ITERATIVA
DE SISTEMAS LINEALES, MEDIANTE SOBRE RELAJACION.

A P E N D I C E



METODO DE SOBRE RELAJACION DE CARRE



CONVERGE
CON 205

ITERACIONES

METODO DE GAUSS-SIEDGL

.999999	1	1	1	1
.999999	1	.999999	1	.9999994
.999999	.999997	1.00001	.999999	1
1	1.00033	1	1	1
1.00002	1	.99997	.999997	.999819
1.00002	.999993	1	.99999	1
1.00002	1.00002	1	1	1
1	.999999	1	.999999	.9999994
1.00001	1.00009	.999997	.999999	1.00005
1.00004	.999998	1	.999998	1.00002
1.00001	1	1	.999998	.999998
1	1.00001	.999999	1	.99998
1	.999997	1	1	1
1	.999986	.999998	.999996	.999999
1	1	1.00001	.999982	1
.999995	1.00001	1	.999999	1.00001
.999997	.9999	.999997	1	.999997
1	.999979	.999994	.999998	1
1	.999991	1	1	1
1	.999999	1.00001	1.00001	.999998
.999986	1.00003	.999995	.999999	.999997
.999996	.999995	1	.999992	.999998
1	1	1	1.00294	.999995
.999744	1	1.00001	.999993	1
.999978	.999995	.999969	1.00001	1
1	.999998	1	.999997	.999999
1	1.00087	1	.999981	.999999
.999999	.999083	.999991	.999997	1
1	.999996	1	.999999	1
1	.999993	.999998	1	.999993
1	.999995	1	1.00003	.999988
.999998	1	1	1.00003	.999999
.999758	.99997	.999974	.999999	1
1	.999999	1	1.00001	1
1	1	.99999	1	.999984
1.00002	1.00001	1.00006	1.00004	.999993
.999979	1	1	1.00001	1.00003
.999971	.999989	.999992	1	1.00005
1.00006	.999998	1	1	1.00012
1	1	<u>.996734</u>	.999999	.999997
1.00001	.999999	1	.999973	.999986
1	1	1.00001	.999996	1
1	1	.999938	1.00001	1
.999619	.999999	.999996	.999992	1
1	.999997	.999829	1.00003	1
.999998	1.00005	1	.999987	.99999
1.00001	1	.999999	.999996	1.00007
1.00002	1.00001	.999999	1	.999996
1	1	.999997	.999999	.999999
1	1.00007	1	1.00001	1
1	.999999	1.00001	1.00002	.999995
.999998	1	1	1	1
1	.999999	.999997	.999999	1
1	1	1	1	1

VALORES SUCESIVOS DEL COEFICIENTE DE LIUSTERNIK

(JUNTO CON LOS DE LAS PRIMERAS 20 INCOGNITAS)

VALOR DE MU= .779825
CON 10 ITERACIONES

.997123	.999876	.999195	1.00011	1.00105
1.00008	1.00028	.998984	1.00008	.99845
.999124	1.00149	1.00271	.999848	1.00106
1.00093	1.09541	1.00023	.998793	1.00005

Stop at line 375

Ready

CONTINUE

VALOR DE MU= .971953
CON 20 ITERACIONES

1.00184	.999987	1.00039	1.00005	1.00001
.999433	.999848	1.00003	.999996	.999979
1.00003	1.00004	.999933	.99997	.99988
1.00001	.997026	1.0003	1.00032	.999943

Stop at line 375

Ready

CONTINUE

VALOR DE MU= .902808
CON 30 ITERACIONES

.999741	1	.999961	.999994	.999979
1.00005	1.00001	1.00001	1	1.00004
1	.999982	.999953	1	.99999
.999991	.998412	.999944	.999975	1

Stop at line 375

Ready

CONTINUE

VALOR DE MU= .954909
CON 40 ITERACIONES

1.00012	.999998	1.00001	1	.999994
.999988	.999996	1	1	.999998
1	1.00002	.999989	1	.999996
1	.999571	1.00002	1	.999997

CONVERGE

CON 48 ITERACIONES

DE LA CONVERGENCIA

1.00002	1	.999999	1	.999996
1	1	1	1	1
1	1.00001	.999991	1	.999997
.999999	.999661	1	.999999	.999998
.999982	1	1.00003	1	1.00018
.999978	1.00001	.999999	1.00001	1
.999982	.999987	1	.999998	1
1	.999969	1	1	1.00001
.999986	.999904	1	1	.999947
.999961	1	.999999	1	.999977
.999995	1	.999999	1	.999989
1	.999989	1	1	1.00002
.999997	1	.999997	.999997	1
.999998	1.00001	1	1.00001	1
.999998	.999998	.999988	1.00002	.999998
1	.999993	1	1	.999991
1	1.00001	1	.999998	1
.999999	1.00002	1.00001	.999997	.999998
.999999	1.00001	.999995	1	.999998
1	1	.999989	.999989	1
1.00001	.999972	1.00001	1	1
1	1	.999991	1.00001	1
.999996	.999998	.999998	.997018	1
1.00026	.999999	.999995	1.00001	.999999
1.00002	1.00001	1.00003	.999992	1.00001
.999999	1	1	1	1
.999999	.999116	.999998	1.00002	1
1	1.00093	1.00001	1	.999995
1	1	.999998	1	.999999
.999999	1.00001	1	.999999	1.00001
.999999	1.00001	1	.999966	1.00001
1	1	.999999	.999971	1
1.00025	1.00003	1.00003	1	.999999
1	1	1	.999995	1
1	.999999	1.00001	1	1.00002
.999984	.999995	.999936	.999965	1.00001
1.00002	.999993	.999998	.999989	.99997
1.00003	1.00001	1.00001	.999999	.999947
.999939	1	1	1	.999876
.999996	.999998	1.00331	1	1
.999993	1	1	1.00003	1.00001
1	1.00001	.999989	1	.999999
.999999	.999996	1.00006	.999994	.999998
1.00039	1	1	1.00001	.999999
1	1.00001	1.00017	.999971	1
1	.999944	.999999	1.00001	1
.999993	1.00002	.999998	1	.999934
.999982	.999986	1	.999997	1
.999999	.999999	1	1	1
1	.999924	.999999	.999992	.999999
1	1	.999992	.999978	1.00001
1	1	.999999	.999997	.999999
.999999	1	1	1	1
1	1	1	.999998	1

METODO DE GRADIENTES CONJUGADOS

CONVERGE CON 42 ITERACIONES. MAX.ERROR REL. = .948159E-6

.999991	.999996	.999949	.999921	.999975
.999999	1.00004	1.00002	.999954	1.00004
1.00001	1.00013	.999947	.999974	.999974
.999988	.999736	.999946	.999933	1
.999948	.999996	.999998	.999962	1.00032
1.00011	1.00001	.999953	.999953	.999977
.999914	1.00027	.999987	1.00003	.999947
.999999	1.00039	1.00003	.999957	.999979
.999993	.999925	.999919	1.00001	.999952
1.00014	.999967	.999966	.999973	.999996
1.00001	.999977	1.00007	.999967	1.00018
.999988	1.00002	.999989	.999956	1.00002
.999949	.999973	1.00001	.999945	1.00011
.999935	1.00022	.999956	.99997	.999979
1.00002	1.00003	1.00005	.999962	.999996
1.00018	.999972	.999968	.999982	.999967
.999966	1.00005	.999976	.999971	1.00001
.999953	1.00026	1.00001	.999949	.999983
1.00004	1.00013	.999978	1	1.00006
.999973	1.00006	1.00012	.999996	1.00001
.999978	.999967	.999972	.999925	1.00002
.999918	.999979	1.00003	1	.999958
1.00006	.999951	1.00007	.998375	.999988
1.00017	.999963	.999926	.999941	.999937
.999987	.999993	1.00013	.999954	.999847
.999989	.999995	1.00004	1.00001	.999949
.999951	.999461	1	1.00007	.999986
.999926	1.00054	1	.999958	1.0001
.999928	1.00006	1.00002	1.00004	1
1	.999987	1.00004	.999982	.999972
.999964	.999937	.999958	.999965	.999879
.999934	.999966	1.00001	1.00014	.999942
1.0001	1.00005	.999977	1.00007	.999977
1.00011	.999939	.999973	.999963	.999995
.999939	.999909	.999981	1.00002	1.00001
.999955	.999956	.99993	.999961	1.00003
1.00009	1.0001	.999977	1.00017	.999968
1.00003	.999911	.999974	.999948	.999968
1.00001	.999978	.999932	.999952	.999896
1.00009	.999985	<u>1.00208</u>	1.00009	.999994
.999997	.999968	.999954	.999976	1.00004
.999975	1.00024	.999943	.999989	.999983
1.00017	.999957	1.00008	.999929	.999968
1.00021	.999974	1.00002	.99996	.99993
.999999	.999924	1.00005	1.00003	.999961
.999983	.99992	.999951	1.00013	.999969
.999994	.999869	1.00009	.999998	.999924
1.00007	1.00011	.999959	.999999	.999963
.999975	.999934	.99999	1.00012	1.00004
1.00002	.999919	.999941	1.00014	.999994
1.00003	1.00002	.999961	.999989	1.00001
.999994	.999951	.999924	.999984	.999975
1	.999932	.999949	.999971	.999937
.99997	.999984	.999976	.999994	.999936

CONVERGE CON 32 ITERACIONES.

METODO MIXTO

.999999	1	1	.999999	1
.999998	.999997	.999999	1	1
.999999	1	.999999	1	1
1	1	.999999	1	1
1	1	1	.999998	1
1	1	1	1	.999999
.999999	.999998	.999998	1	1
1	1	1	1	1
1	.999999	1	1	.999999
.999999	.999998	.999999	.999998	1
.999999	1	.999997	1	1
1	1	.999999	.999999	1
1	1	1	1	.999998
1	.999999	1	.999998	1
.999998	1	1	1	1
1	1	1	.999999	.999999
1	.999999	.999999	.999998	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
.999999	1	1	.999999	1
.999999	1	1	1	1
1	1	1	1	.999999
1	1	1	.999973	.999999
1	.999998	1	1	1
1	1	.999998	1	1
1	1	1	1	1
1	.999994	1	1	1
1	1.00001	.999999	1	.999999
1	1	1	1	1
.999999	1	.999999	.999999	1
1	1	1	1	1
.999999	1	1	1	.999998
1	1	1	1	.999998
1	.999998	1	1	.999999
1	.999999	1	1	1
1	.999999	1	1	1
1	1	1	.999999	1
1	1	1	.999999	.999999
.999997	1	.999999	1	1
.999999	.999999	<u>1.00003</u>	1	1
1	1	.999999	1	.999997
.999998	.999998	.999999	1	.999999
.999999	.999999	1	1	.999998
1	1	1	.999999	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	.999997	.999998	.999999	.999998
1	1	1	1	.999999
.999999	1	1	.999999	1
.999999	.999999	1	1	1
1	.999999	.999998	.999999	.999999
1	.999999	.999998	.999999	.999999
1	1	.999999	1	1
.999998	1	1	1	1